第26卷 第6期 工 程 数 学 学 报 Vol. 26 No. 6
2009年12月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Dec. 2009

**文章编号**:1005-3085(2009)06-1069-14

# 带趋势项GARCH误差模型参数变化的残量检验*

金 浩[1]，田 铮[1,2]，张 思[3]

(1- 西北工业大学应用数学系，西安 710072;
2- 遥感科学国家重点实验室，中科院自动化所，北京 100101;
3- 西安科技大学高新学院，西安 710109)

**摘 要**: 本文研究带趋势项GARCH误差模型的参数变点检验。在参数未知的情况下，利用残量累积和检验以消除相依序列对检验结果的影响：研究表明在原假设条件成立下，残量累积和统计量的极限分布是一个标准布朗桥的上确界。蒙特卡罗数值模拟和IBM收益率数据分析的结果都充分说明了本文方法的有效性和实用性。

**关键词**: 残量累积和检验；不变性原理；布朗桥；变点

**分类号**: AMS(2000) 62F12; 60F20 **中图分类号**: O212.9 **文献标识码**: A

## 1 引言

变点问题起源于质量控制，从生产线上抽检产品以检测产品质量是否发生显著性波动，特别是产品质量是否超过其质量检测范围。当产品质量超过质量控制警界线时，希望能及时预警，以免出现更多次品，这个质量超过警界线的时刻就称为变点。变点问题在工业自动控制、金融、医学等领域都有着实际应用背景。对工序质量的检查、故障检测、分析汇率的变化规律、心电图的韵律分析、试飞数据中数据跳跃点的估计等都可以归结为对系统的变点研究。

结构变点分析本质上属于数理统计和非线性时间序列分析范畴，它引起了国内外众多学者的关注，并涌现出大量关于结构变点的文献，如Csorgo和Horvath[1]，Bhattcharya[2]，Krishnaiah[3]等。特别近十年来，学者们更加热衷于研究各种包含未知时刻结构变点的模型。其中，韩四儿[4]，Andrews和Ploberger[5]研究了关于结构变点的检验问题，Bai[6]则考虑了关于结构变点估计的一致性和收敛速度等特性。以上都是关于单个变点的研究，而对于多个结构变点的检验和估计的研究成果则可参见文献[7,8]。

在计量经济学中，有大量关于ARCH和GARCH过程这方面的文献，如：Engle[9]，Kokoszka[10]，Hall[11]等。GARCH过程最主要的特征是：序列本身是不相关的，但序列每项平方以后的新序列却是相依的。因为GARCH过程的条件方差是其参数的函数，则可以通过对条件方差的检验来判断其参数是否发生了变化。Andreou和Ghysels[12]提出应用Inclan和Tiao[13]的方差平方累积和统计量检验GARCH(1,1)模型参数的变化，而Maekawa等人[14]用同样的方法对ARCH模型的变点问题进行了研究。尽管他们的理论正确，但大量的数值模拟结果表明，由于GARCH过程的条件方差的变化会造成检验的不稳定，因而用平方累积和统计量来检验结构变点会产生过分拒绝原假设和势函数值过低的缺陷。为弥补这缺陷，Lee等人[15]提出构造残量累积和(RCUSUM)统计量检验GARCH(1,1)模型参数的变化。这是因为基于残量的检验能

**收稿日期**: 2007-11-15. **作者简介**: 金浩(1980年8月生)，男，博士. 研究方向：非线性时间序列分析.
***基金项目**: 国家自然科学基金(50905140; 60375003)；西北工业大学科技创新基金(2007KJ01033).

够消除序列彼此相依的影响，从而改进检验的效果。但是由于一般的 GARCH$(p,q)$ 模型具有更复杂的概率结构，所以把文 [15] 的结果直接推广到 GARCH$(p,q)$ 模型场合存在一定的难度。本文应用 Berkes，Horvath 和 Kokoszka[16] 对 GARCH$(p,q)$ 模型研究的一些结果，对带趋势项的 GARCH 误差模型的参数变化进行残量累积和检验。

## 2 模型和假设

本节沿用 Berkes 等人[16] 的定义和假设，考虑模型

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + \beta t + \eta_t, \qquad \eta_t = h_t \varepsilon_t, \\ h_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j h_{t-j}^2, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\eta_t$ 是一个 GARCH$(p,q)$ 过程。定义参数向量

$$\pi = (\mu,\beta,\theta) = (\mu,\beta,\omega,\alpha_1,\beta_1,\cdots), \quad \pi^* = (\mu^*,\beta^*,\theta^*) = (\mu^*,\beta^*,\omega^*,\alpha_1^*,\beta_1^*,\cdots),$$

且 $\pi \neq \pi^*$。原假设和备择假设分别定义如下

$H_0$：参数 $\pi = (\mu,\beta,\omega,\alpha_1,\beta_1,\cdots)$ 保持不变，

$H_1$：参数在时刻 $k^*$ 从 $\pi = (\mu,\beta,\omega,\alpha_1,\beta_1,\cdots)$ 变化到 $\pi^* = (\mu^*,\beta^*,\omega^*,\alpha_1^*,\beta_1^*,\cdots)$.

本文假设 $\varepsilon_t$ $(-\infty < t < \infty)$ 是独立同分布序列，令

$$\hat{L}_T(u) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{2}\Big\{\log\hat{\phi}_t(u) + \frac{\eta_t^2}{\hat{\phi}_t(u)}\Big\},$$

其中

$$\hat{\phi}_t(u) = c_0(u) + \sum_{i=1}^{t} c_i(u)\eta_{t-i}^2,$$

函数 $c_i(u)$ $(0 \le i < \infty)$ 在文献 [16] 中定义如下。对于 $u = (x, s_1, \cdots, s_p, t_1, \cdots, t_q)$，若 $q \ge p$，则

$$\begin{aligned} c_0(u) &= x/(1-(t_1+\cdots+t_q)), \\ c_1(u) &= s_1, \\ c_2(u) &= s_2 + t_1 c_1(u), \\ &\ \vdots \\ c_p(u) &= s_p + t_1 c_{p-1}(u) + t_2 c_{p-2}(u) + \cdots + t_{p-1} c_1(u), \\ c_{p+1}(u) &= t_1 c_p(u) + t_2 c_{p-1}(u) + \cdots + t_p c_1(u), \\ &\ \vdots \\ c_q(u) &= t_1 c_{q-1}(u) + t_2 c_{q-2}(u) + \cdots + t_{q-1} c_1(u). \end{aligned}$$

若 $q < p$，则 $c_i(u)$ $(0 \le i < \infty)$ 定义为

$$\begin{aligned}
c_0(u) &= x/(1-(t_1+\cdots+t_q)),\\
c_1(u) &= s_1,\\
c_2(u) &= s_2 + t_1 c_1(u),\\
&\vdots\\
c_q(u) &= s_q + t_1 c_{q-1}(u) + t_2 c_{q-2}(u) + \cdots + t_{q-1} c_1(u),\\
c_{q+1}(u) &= s_{q+1} + t_1 c_q(u) + t_2 c_{q-1}(u) + \cdots + t_q c_1(u),\\
&\vdots\\
c_p(u) &= s_p + t_1 c_{p-1}(u) + t_2 c_{p-2}(u) + \cdots + t_q c_{p-q}(u).
\end{aligned}$$

若 $i > R = \max(p,q)$，则

$$c_i(u) = t_1 c_{i-1}(u) + t_2 c_{i-2}(u) + \cdots + t_q c_{i-q}(u).$$

为保证 GARCH$(p,q)$ 过程具有唯一平稳解，引入以下符号。令

$$\begin{aligned}
\tau_T &= (\beta_1 + \alpha_1 \varepsilon_T^2,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_{q-1}) \in R^{q-1},\\
\varsigma_T &= (\varepsilon_T^2, \cdots, 0) \in R^{q-1},\\
\alpha &= (\alpha_2, \cdots, \alpha_{p-1}) \in R^{p-2}.
\end{aligned}$$

不失一般性，假设 $\min(p,q) \ge 2$。定义 $(p+q-1)\times(p+q-1)$ 维分块矩阵 $A_T$：

$$A_T = \begin{pmatrix} \tau_T & \beta_q & \alpha & \alpha_p \\ I_{q-1} & 0 & 0 & 0 \\ \varsigma_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{p-2} & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $I_{q-1}$ 和 $I_{p-2}$ 分别是 $q-1$ 维与 $q-2$ 维的单位矩阵。$d\times d$ 维矩阵 $M$ 的范数定义为

$$\|M\| = \sup\{\|MX\|_d/\|X\|_d : X \in R^d,\ X \ne 0\},$$

其中 $\|\cdot\|$ 是 $R^d$ 空间的 Euclid 范数。

序列 $\{A_T, -\infty < T < \infty\}$ 的最大 Lyapunov 指数定义为

$$\gamma_L = \inf_{1\le T<\infty} \frac{1}{T} E \log \|A_0 A_1 \cdots A_T\|.$$

设

$$E(\log\|A_0\|) < \infty, \tag{2}$$

Bougerol 与 Picard[17,18] 证明若上式成立，则 GARCH$(p,q)$ 过程有唯一平稳解的充分必要条件是

$$\gamma_L < 0, \tag{3}$$

注意到这个条件隐含着 $\beta_1+\cdots+\beta_q<1$。

现在介绍参数空间的一些条件。令 $0<\underline{u}<\overline{u}$，$0<\rho_0\ll 1$，$q\underline{u}<\rho_0$，定义

$$U=\big\{u:t_1+t_1+\cdots+t_q\le\rho_0,\ \underline{u}<\min(x,s_1,s_2,\cdots,s_p,t_1,\cdots,t_q)\\ \le\max(x,s_1,s_2,\cdots,s_p,t_1,\cdots,t_q)\le\overline{u}\big\}.$$

假设 $\theta\in U$，此条件意味着 $U$ 中的每一个元素可以作为 GARCH 过程的参数。

为使参数 $\theta$ 是唯一确定的，需以下两个条件：

(i) 实系数多项式 $\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots+\alpha_px^p$ 与 $1-\beta_1x-\beta_2x^2-\cdots-\beta_qx^q$ 互素，

(ii) $\varepsilon_1$ 是非退化的随机变量。

为估计 $\omega_0(u)/\omega_0(\theta)$ 的矩，Berkes 等人[16] 假设存在 $\kappa>0$ 使得

$$\lim_{t\to0}t^{-\kappa}P(\varepsilon_1^2<t)=0. \tag{4}$$

对 $\varepsilon_1$ 还需附加以下条件

$$E\varepsilon_1^2=1, \tag{5}$$

存在 $\delta>0$，使得

$$E|\varepsilon_1|^{4+\delta}<\infty. \tag{6}$$

Berkes 等人[16] 证明若不存在变点条件，且条件 (2)-(6) 成立，则 $T^{1/2}(\hat\theta-\theta)$ 渐近收敛于正态分布，并且有以下两个引理成立。

**引理 2.1**[16] 对任意 $u=(x,s_{1,},s_2,\cdots,s_p,t_1,\cdots,t_q)$, $u^*=(x^*,s^*_{1,},s^*_2,\cdots,s^*_p,t^*_1,\cdots,t^*_q)\in U$，有

$$C_1\underline{u}^i<c_i(u),\quad c_i(u)\le C_2\rho_0^{i/q},\quad \frac{c_i(u^*)}{c_i(u)}\le C_3\Big(\max_{1\le j\le q}\frac{t^*_j}{t_j}\vee 1\Big)^i,\qquad 0\le i<\infty.$$

其中 $C_1$, $C_2$, $C_3$ 为正常数。

**引理 2.2**[16] 设 $\theta\in U$，则有

$$\Big|\frac{\partial c_0(u)}{\partial x}\Big|\le\frac{1}{1-\rho_0};\qquad \frac{\partial c_0(u)}{\partial s_j}=0,\quad 1\le j\le p;$$

$$\Big|\frac{\partial c_0(u)}{\partial t_j}\Big|\le\frac{\overline{u}}{(1-\rho_0)^2},\quad 1\le j\le q;\qquad \frac{|c_i'(u)|}{c_i(u)}\le C_4 i,\quad 1<i<\infty.$$

其中 $C_4$ 是常数，

$$c_i'(u)=\Big(\frac{\partial c_i(u)}{\partial x},\frac{\partial c_i(u)}{\partial s_1},\cdots,\frac{\partial c_i(u)}{\partial s_p},\frac{\partial c_i(u)}{\partial t_1},\cdots,\frac{\partial c_i(u)}{\partial t_q}\Big).$$

## 3 主要结果

本节给出 GARCH$(p,q)$ 模型参数变化的残量累积和 (RCUSUM) 检验。设 $y_t$, $t=1,2,\cdots,T$，是样本数据，参数 $\theta$ 的估计定义为

$$\hat\theta=\arg\max_u\{\hat L_T(u):u\in U\}.$$

条件方差

$$h_t^2 = c_0(\theta) + \sum_{j=1}^{\infty} c_j(\theta) h_{t-j}^2$$

的估计为

$$\hat{h}_t^2 = c_0(\hat{\theta}) + \sum_{j=1}^{\lambda} c_j(\hat{\theta}) h_{t-j}^2,$$

其中 $\lambda$ 是正整数序列，满足条件：当 $T \to \infty$ 时，$\lambda \to \infty$ 且 $\lambda^2/T \to 0$。

则残量 $\hat{\varepsilon}_t$ 的估计为

$$\hat{h}_t^2 = c_0(\hat{\theta}) + \sum_{j=1}^{\lambda} c_j(\hat{\theta}) \hat{\eta}_{t-j}^2, \qquad \hat{\eta}_t = y_t - \hat{\mu} - \hat{\beta} t, \qquad \hat{\varepsilon}_t = \hat{\eta}_t / \hat{h}_t,$$

其中 $\hat{\mu} - \mu = O_p(T^{-1/2})$ 和 $\hat{\beta} - \beta = O_p(T^{-3/2})$。基于 $\varepsilon_t$ 的累积和统计量定义为

$$R_k = \frac{1}{\sqrt{T}\tau} \max_{1 \le k \le T} \Big| \sum_{t=1}^{k} \varepsilon_t^2 - \frac{k}{T} \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t^2 \Big|,$$

其中 $\varepsilon_t$ 是有界平稳的随机变量，且 $\tau^2 = \mathrm{Var}(\varepsilon_1^2)$。基于残量 $\hat{\varepsilon}_t$ 的累积和统计量定义为

$$\hat{R}_k = \frac{1}{\sqrt{T}\hat{\tau}} \max_{1 \le k \le T} \Big| \sum_{t=1}^{k} \hat{\varepsilon}_t^2 - \frac{k}{T} \sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2 \Big|,$$

这里

$$\hat{\tau}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^4 - \Big( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2 \Big)^2.$$

**定理 3.1**　若引理 2.1 和引理 2.2 成立，对任意的 $0 < \rho_0 \ll 1$，存在一个正整序列 $\lambda = \lambda_t$，满足当 $T \to \infty$ 时，有 $\lambda \to \infty$，$\lambda/\sqrt{T} \to 0$ 和 $\sum_{j=1}^{\lambda} \rho_0^{j/q} < \infty$，且序列 $\{(\eta_t, h_t)\}$ 是强混合序列，则当原假设 $H_0$ 条件成立时，有

$$\hat{R}_k \xrightarrow{d} \sup_{0 \le v \le 1} \big| W^0(v) \big|,$$

其中 $v = k/T$，$W^0(v)$ 为 [0,1] 上标准的布朗桥。

**证明**　注意到

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \frac{\hat{\eta}_t^2}{\hat{h}_t^2} = \frac{(y_t - \hat{\mu} - \hat{\beta} t)^2}{\hat{h}_t^2} = \frac{\eta_t^2}{\hat{h}_t^2} + \frac{1}{\hat{h}_t^2} \Big[ 2\eta_t(\hat{\beta} - \beta) t + 2\eta_t(\hat{\mu} - \mu)$$

$$+ 2(\hat{\mu} - \mu)(\hat{\beta} - \beta) t + (\hat{\mu} - \mu)^2 + t^2(\hat{\beta} - \beta)^2 \Big] = \frac{\eta_t^2}{\hat{h}_t^2} + \sum_{i=3}^{7} V_{i,t},$$

$$\frac{\eta_t^2}{\hat{h}_t^2} = \frac{\eta_t^2}{h_t^2} + \frac{(h_t^2 - \hat{h}_t^2)\varepsilon_t^2}{h_t^2} + \frac{(h_t^2 - \hat{h}_t^2)^2 \varepsilon_t^2}{h_t^2 \hat{h}_t^2} = \varepsilon_t^2 + \sum_{i=1}^{2} V_{i,t}.$$

要证明定理 3.1，实际上等价于证明下面结论的成立。

$$R_{i,k} := \frac{1}{\sqrt{T}} \max_{1 \le k \le T} \Big| \sum_{t=1}^{k} V_{i,t} - \frac{k}{T} \sum_{t=1}^{T} V_{i,t} \Big| = o_p(1), \qquad i = 1, \cdots, 7. \tag{7}$$

我们首先处理$V_{1,t}$。注意到

$$h_t^2-\hat{h}_t^2 = (c_0(\theta)-c_0(\hat{\theta}))+\sum_{j=\lambda+1}^{\infty}c_j(\theta)\eta_{t-j}^2+\sum_{j=1}^{\lambda}(c_j(\theta)-c_j(\hat{\theta}))\eta_{t-j}^2$$

$$+\sum_{j=1}^{\lambda}c_j(\hat{\theta})(\eta_{t-j}^2-\hat{\eta}_{t-j}^2)=\sum_{i=1}^{4}W_{i,t}.$$

根据强混合序列的不变性原理，有

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\max_{1\le k\le T}\Big|\sum_{t=1}^{k}\Big(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2}-E\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2}\Big)-\frac{k}{T}\sum_{t=1}^{T}\Big(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2}-E\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2}\Big)\Big|=O_p(1). \tag{8}$$

由引理2.1，引理2.2及中值定理，有

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\max_{1\le k\le T}\Big|\big(c_0(\theta)-c_0(\hat{\theta})\big)\Big(\sum_{t=1}^{k}\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2}-\frac{k}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2}\Big)\Big|$$

$$=|(\theta-\hat{\theta})|\frac{1}{\sqrt{T}}\max_{1\le k\le T}\Big|\sum_{t=1}^{k}\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2}-\frac{k}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2}\Big||c_0'(\zeta_0)|=o_p(1)\cdot O_p(1)=o_p(1). \tag{9}$$

同样，根据强混合序列的不变性原理，有

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\Big(\sum_{t=1}^{k}\frac{\varepsilon_t^2\eta_{t-j}^2}{h_t^2}-\frac{k}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\varepsilon_t^2\eta_{t-j}^2}{h_t^2}\Big)=O_p(1).$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\max_{1\le k\le T}\Big|\sum_{j=\lambda+1}^{\infty}c_j(\theta)\Big(\sum_{t=1}^{k}\frac{\varepsilon_t^2\eta_{t-j}^2}{h_t^2}-\frac{k}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\varepsilon_t^2\eta_{t-j}^2}{h_t^2}\Big)\Big|$$

$$=O_p\Big(\sum_{j=\lambda+1}^{\infty}c_j(\theta)\Big)=O_p\big(\rho_0^{(\lambda+1)/q}\big)=o_p(1). \tag{10}$$

同理可证，$W_{3,t}$满足下式

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\max_{1\le k\le T}\Big|\sum_{j=1}^{\lambda}\big(c_j(\theta)-c_j(\hat{\theta})\big)\Big(\sum_{t=1}^{k}\frac{\varepsilon_t^2\eta_{t-j}^2}{h_t^2}-\frac{k}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\varepsilon_t^2\eta_{t-j}^2}{h_t^2}\Big)\Big|$$

$$=O_p\Big(\sum_{j=1}^{\lambda}|(\theta-\hat{\theta})||c_j'(\zeta_j)|\Big)=O_p\Big(\sum_{j=1}^{\lambda}|(\theta-\hat{\theta})|j|c_j(\zeta_j)|\Big)$$

$$=O_p\Big(\sum_{j=1}^{\lambda}|(\theta-\hat{\theta})|j\rho_0^{j/q}\Big)=O_p\Big(\frac{\lambda}{\sqrt{T}}\sum_{j=1}^{\lambda}\rho_0^{j/q}\Big)=o_p(1). \tag{11}$$

最后，只需验证$W_{4,t}$满足

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\max_{1\le k\le T}\Big|\sum_{t=1}^{k}\frac{W_{4,t}\varepsilon_t^2}{h_t^2}-\frac{k}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{W_{4,t}\varepsilon_t^2}{h_t^2}\Big|=o_p(1). \tag{12}$$

注意到

$$
\begin{aligned}
c_j(\hat\theta)\big[\eta_{t-j}^2-\hat\eta_{t-j}^2\big] \;=\; & c_j(\hat\theta)\big[\,2(\hat\mu-\mu)\eta_{t-j}+2(\hat\beta-\beta)t\eta_{t-j}\\
& -2(\hat\mu-\mu)(\hat\beta-\beta)t-(\hat\mu-\mu)^2-(\hat\beta-\beta)^2t^2\,\big]=\sum_{i=1}^{5}Q_{i,t}.
\end{aligned}
$$

为证(12)，需验证

$$
\frac{1}{\sqrt{T}}\max_{1\le k\le T}\Big|\sum_{j=1}^{\lambda}\sum_{t=1}^{k}\frac{Q_{i,t}\varepsilon_t^2}{h_t^2}-\frac{k}{T}\sum_{j=1}^{\lambda}\sum_{t=1}^{T}\frac{Q_{i,t}\varepsilon_t^2}{h_t^2}\Big|=o_p(1),\qquad i=1,\cdots,5.
$$

因为

$$
\frac{1}{\sqrt{T}}\max_{1\le k\le T}\Big|\sum_{t=1}^{k}\frac{\eta_{t-j}\varepsilon_t^2}{h_t^2}-\frac{k}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\eta_{t-j}\varepsilon_t^2}{h_t^2}\Big|=O_p(1),
$$

并且$\hat\mu-\mu=O_p(T^{-1/2})$，$\hat\beta-\beta=O_p(T^{-3/2})$，所以

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{T}}\max_{1\le k\le T}\Big|\sum_{j=1}^{\lambda}c_j(\hat\theta)(\hat\mu-\mu)\Big(\sum_{t=1}^{k}\frac{\eta_{t-j}\varepsilon_t^2}{h_t^2}-\frac{k}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\eta_{t-j}\varepsilon_t^2}{h_t^2}\Big)\Big|\\
=\;& O_p\Big(T^{-1/2}\sum_{j=1}^{\lambda}c_j(\hat\theta)\Big)=O_p\Big(T^{-1/2}\sum_{j=1}^{\lambda}c_j(\theta)\Big)+o_p(1)=o_p(1).
\end{aligned}
$$

又因为

$$
\frac{1}{\sqrt{T}}\Big(\sum_{t=1}^{k}\frac{t\eta_{t-j}\varepsilon_t^2}{h_t^2}-\frac{k}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{t\eta_{t-j}\varepsilon_t^2}{h_t^2}\Big)=O_p(T).
$$

同理可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{T}}\max_{1\le k\le T}\Big|\sum_{j=1}^{\lambda}c_j(\hat\theta)(\hat\beta-\beta)\Big(\sum_{t=1}^{k}\frac{t\eta_{t-j}\varepsilon_t^2}{h_t^2}-\frac{k}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{t\eta_{t-j}\varepsilon_t^2}{h_t^2}\Big)\Big|\\
=\;& O_p\Big(T^{-1/2}\sum_{j=1}^{\lambda}c_j(\hat\theta)\Big)=O_p\Big(T^{-1/2}\sum_{j=1}^{\lambda}c_j(\theta)\Big)+o_p(1)=o_p(1).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

对于$Q_{3,t}$, $Q_{4,t}$, $Q_{5,t}$的证明本质上与$Q_{1,t}$, $Q_{2,t}$的证明是一致的，故略。这样我们证明了$R_{1,t}=o_p(1)$。

下面我们来证明$R_{2,t}=o_p(1)$。注意到$\hat h_t^2\ge 0$，那么我们总可以找到一个正常数$M>0$，使得$\hat h_t^2\ge M$。因为

$$
h_t^2-\hat h_t^2=\sum_{i=1}^{4}W_{i,t},
$$

那么先证明 $W_{2,t}^2$ 满足下式

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\max_{1\le k\le T}\Big|\Big(\sum_{j=\lambda+1}^{T}c_j(\theta)\Big)^2\Big(\sum_{t=1}^{k}\frac{\eta_{t-j}^4\varepsilon_t^2}{h_t^2\hat{h}_t^2}-\frac{k}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\eta_{t-j}^4\varepsilon_t^2}{h_t^2\hat{h}_t^2}\Big)\Big|$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{T}}\max_{1\le k\le T}\Big|\frac{1}{M}\max_{1\le t\le T}\eta_t^2\Big(\sum_{j=\lambda+1}^{T}c_j(\theta)\Big)^2\Big(\sum_{t=1}^{k}\frac{\eta_{t-j}^2\varepsilon_t^2}{h_t^2}-\frac{k}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\eta_{t-j}^2\varepsilon_t^2}{h_t^2}\Big)\Big|$$

$$= O_p\Big(\Big(\sum_{j=\lambda+1}^{T}c_j(\theta)\Big)^2\Big)=O_p\Big(\Big(\sum_{j=\lambda+1}^{T}\rho_0^{j/q}\Big)^2\Big)=o_p(1). \tag{14}$$

同理可证 $W_{3,t}^2$ 满足下式

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\max_{1\le k\le T}\Big|\Big(\sum_{j=1}^{\lambda}\big(c_j(\theta)-c_j(\hat{\theta})\big)\Big)^2\sum_{t=1}^{k}\frac{\eta_{t-j}^4\varepsilon_t^2}{h_t^2\hat{h}_t^2}-\frac{k}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\eta_{t-j}^4\varepsilon_t^2}{h_t^2\hat{h}_t^2}\Big|$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{T}}\max_{1\le k\le T}\Big|\frac{1}{M}\max\eta_t^2\Big(\sum_{j=1}^{\lambda}\big(c_j(\theta)-c_j(\hat{\theta})\big)\Big)^2\Big(\sum_{t=1}^{k}\frac{\eta_{t-j}^2\varepsilon_t^2}{h_t^2}-\frac{k}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\eta_{t-j}^2\varepsilon_t^2}{h_t^2}\Big)\Big|$$

$$= O_p\Big(\Big(|\theta-\hat{\theta}|\sum_{j=1}^{\lambda}c_j'(\zeta_j)\Big)^2\Big)=O_p\Big(\Big(|\theta-\hat{\theta}|\sum_{j=1}^{\lambda}jc_j(\zeta_j)\Big)^2\Big)$$

$$= O_p\Big(\Big(|\theta-\hat{\theta}|\sum_{j=1}^{\lambda}j\rho_0^{j/q}\Big)^2\Big)=O_p\Big(\frac{\lambda^2}{T}\Big)O_p\Big(\Big(\sum_{j=1}^{\lambda}\rho_0^{j/q}\Big)^2\Big)=o_p(1). \tag{15}$$

由于

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\Big|\sum_{t=1}^{k}W_{i,t}^2\varepsilon_t^2-\frac{k}{T}\sum_{t=1}^{T}W_{i,t}^2\varepsilon_t^2\Big|\le\frac{2}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}W_{i,t}^2\varepsilon_t^2.$$

要验证 $R_{2,t}=o_p(1)$，还需验证

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}W_{i,t}^2\varepsilon_t^2=o_p(1),\qquad i=1,4. \tag{16}$$

由引理2.1，所以 $c_0(\theta)-c_0(\hat{\theta})=(\theta-\hat{\theta})\cdot c_0'(\zeta_0)=O_p(T^{-1/2})$，并有

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}W_{1,t}^2\varepsilon_t^2=\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}(c_0(\theta)-c_0(\hat{\theta}))^2\varepsilon_t^2=o_p(1).$$

下面证明当 $i=4$ 时，(16) 式也成立。即

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}W_{4,t}^2\varepsilon_t^2=\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}\Big(\sum_{j=1}^{\lambda}c_j(\hat{\theta})(\eta_t^2-\hat{\eta}_t^2)\Big)^2\varepsilon_t^2=o_p(1). \tag{17}$$

前面已证

$$c_j(\hat{\theta})(\eta_{t-j}^2-\hat{\eta}_{t-j}^2)=\sum_{i=1}^{5}Q_{i,t},$$

则只需证明下式成立

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}\Big(\sum_{j=1}^{\lambda}Q_{i,t}\Big)^2\varepsilon_t^2=o_p(1),\qquad i=1,\cdots,5. \tag{18}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}\Big(\sum_{j=1}^{\lambda}c_j(\hat\theta)\eta_{t-j}(\hat\mu-\mu)\Big)^2\varepsilon_t^2\\ &= O_p\Big(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}T^{-1}\Big(\sum_{j=1}^{\lambda}c_j(\hat\theta)\Big)^2\Big)=O_p\Big(\frac{1}{\sqrt{T}}\Big(\sum_{j=1}^{\lambda}c_j(\theta)\Big)^2\Big)+o_p(1)=o_p(1).\end{aligned} \tag{19}$$

由于$\beta-\hat\beta=O_P(T^{-3/2})$，容易证明

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}\Big(\sum_{j=1}^{\lambda}c_j(\hat\theta)\eta_{t-j}(\hat\beta-\beta)t\Big)^2\varepsilon_t^2\\ &= O_p\Big(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}t^2T^{-3}\Big(\sum_{j=1}^{\lambda}c_j(\hat\theta)\Big)^2\Big)=O_p\Big(\frac{1}{\sqrt{T}}\Big(\sum_{j=1}^{\lambda}c_j(\theta)\Big)^2\Big)+o_p(1)=o_p(1).\end{aligned} \tag{20}$$

同理，对于$Q_{3,t}$, $Q_{4,t}$, $Q_{5,t}$的证明本质上与$Q_{1,t}$, $Q_{2,t}$的证明也是完全一致的，我们再次省略其证明步骤。这样我们完成了$R_{2,t}=o_p(1)$的证明。

类似于(16)的证明，我们同样可以证明对于$W_{2,t}$和$W_{3,t}$，有

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}W_{i,t}^2\varepsilon_t^2=o_p(1),\qquad i=2,3. \tag{21}$$

联立(16)和(21)，则

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(h_t^2-\hat h_t^2)^2\varepsilon_t^2=o_p(1). \tag{22}$$

我们还要证明当$i=3,\cdots,7$时，有$R_{i,t}=o_p(1)$。很容易证明$R_{6,t}=o_p(1)$。此外，我们完全可以用证明$R_{1,t}=o_p(1)$和$R_{2,t}=o_p(1)$的方法来证明$R_{i,t}=o_p(1)$，$i=3,4,5,7$。这样我们就证明了(7)式，也意味着

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\max_{1\le k\le T}\Big|\sum_{t=1}^{k}\hat\varepsilon_t^2-\frac{k}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat\varepsilon_t^2\Big|=\frac{1}{\sqrt{T}}\max_{1\le k\le T}\Big|\sum_{t=1}^{k}\varepsilon_t^2-\frac{k}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2\Big|+o_p(1). \tag{23}$$

由泛函中心极限定理

$$\frac{k}{T}\cdot\frac{1}{\sqrt{T}\tau}\sum_{t=1}^{T}(\varepsilon_t^2-E\varepsilon_t^2)\xrightarrow{d}vW(1),\quad \frac{1}{\sqrt{T}\tau}\sum_{t=1}^{k}(\varepsilon_t^2-E\varepsilon_t^2)\xrightarrow{d}W(v),$$

成立，再由连续映射定理，则

$$\begin{aligned}R_k &= \frac{1}{\sqrt{T}\tau}\max_{1\le k\le T}\Big|\sum_{t=1}^{k}\varepsilon_t^2-\frac{k}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2\Big|\\ &= \frac{1}{\sqrt{T}\tau}\max_{1\le k\le T}\Big|\sum_{t=1}^{k}(\varepsilon_t^2-E\varepsilon_t^2)-\frac{k}{T}\sum_{t=1}^{T}(\varepsilon_t^2-E\varepsilon_t^2)\Big|\xrightarrow{d}\sup_{0\le v\le 1}\big|W^0(v)\big|.\end{aligned} \tag{24}$$

要证明定理，最后我们还要证明方差估计的一致性：$\hat{\tau}^2 \xrightarrow{P} \tau^2 = \mathrm{Var}(\varepsilon_1^2) = E\varepsilon_1^4 - (E\varepsilon_1^2)^2$。注意到

$$\hat{\varepsilon}_t^2 - \varepsilon_t^2 = \frac{(h_t^2 - \hat{h}_t^2)\varepsilon_t^2}{\hat{h}_t^2} + \frac{\hat{\eta}_t^2 - \eta_t^2}{\hat{h}_t^2}. \tag{25}$$

根据前面证明，我们知道 $\frac{\hat{\eta}_t^2 - \eta_t^2}{\hat{h}_t^2}$ 满足

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\hat{\eta}_t^2 - \eta_t^2}{\hat{h}_t^2} = o_p(1), \qquad \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\Big(\frac{\hat{\eta}_t^2 - \eta_t^2}{\hat{h}_t^2}\Big)^2 = o_p(1). \tag{26}$$

因此，由 (22)，(25) 和 (26) 式，有

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\hat{\varepsilon}_t^2 - \varepsilon_t^2)\Big| \;&\le\; \Big|\frac{1}{TM}\sum_{t=1}^{T}(h_t^2 - \hat{h}_t^2)\varepsilon_t^2\Big| + o_p(1)\\ &\le\; \frac{1}{M}\Big(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(h_t^2 - \hat{h}_t^2)^2\varepsilon_t^2\Big)^{1/2}\cdot\Big(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2\Big)^{1/2} = o_p(1),\end{aligned} \tag{27}$$

这样就证明了

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t^2 \xrightarrow{P} E\varepsilon_1^2. \tag{28}$$

同理，根据 (22)，(25) 和 (26) 式，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\hat{\varepsilon}_t^2 - \varepsilon_t^2)^2 \;&\le\; \frac{1}{TM}\sum_{t=1}^{T}(\hat{h}_t^2 - h_t^2)^2\varepsilon_t^4 + o_p(1)\\ &\le\; \frac{1}{M}\Big(\max_{1\le t\le T}\varepsilon_t^2\Big)\cdot\Big(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(h_t^2 - \hat{h}_t^2)^2\varepsilon_t^2\Big) + o_p(1) = o_p(1).\end{aligned} \tag{29}$$

从而有

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\hat{\varepsilon}_t^2 + \varepsilon_t^2)^2 \;&=\; \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\hat{\varepsilon}_t^2 - \varepsilon_t^2)^2 + \frac{4}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2\hat{\varepsilon}_t^2\\ &\le\; \frac{2}{T}\sum_{t=1}^{T}(\hat{\varepsilon}_t^2 - \varepsilon_t^2)^2 + \frac{8}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^4 = O_p(1).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t^4 - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^4\Big| \;&\le\; \Big(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\hat{\varepsilon}_t^2 - \varepsilon_t^2)^2\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\hat{\varepsilon}_t^2 + \varepsilon_t^2)^2\Big)^{1/2}\\ &=\; o_p(1)\cdot O_p(1) = o_p(1).\end{aligned} \tag{30}$$

这样就证明了

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t^4 \xrightarrow{P} E\varepsilon_1^4. \tag{31}$$

联立 (30) 和 (31) 式，有 $\hat{\tau}^2 \xrightarrow{P} \tau^2$。再鉴于 (23) 式和 (24) 式，则定理得证。

## 4 数值模拟和实例分析

本节首先用数值模拟说明用残量累积和方法检验带趋势项GARCH误差模型参数变化的可行性。为了更好的分析检验统计量 $\hat{R}_k$ 的性质，我们考虑GARCH(1,2)模型

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu + \beta t + \eta_t, \\ \eta_t &= h_t \varepsilon_t, \\ h_t^2 &= \omega + \alpha_1 \eta_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}^2 + \beta_2 h_{t-2}^2. \end{aligned}$$

我们用蒙特卡罗方法研究在大样本容量条件下的残量检验统计性质。令 $\varepsilon_t$ 是独立同分布的正态随机变量序列。设置变点时刻为 $k^* = T/2$，即参数从 $\pi = (\mu, \beta, \omega, \alpha_1, \beta_1, \beta_2)$ 变化到 $\pi^* = (\mu^*, \beta^*, \omega^*, \alpha_1^*, \beta_1^*, \beta_2^*)$。样本容量分别依次取为 $T = 500, 1000, 2000$，且检验的显著性水平为0.05。此外取 $\lambda = [\log T]^2$，并用1000次试验中拒绝原假设的百分数作为检验水平值或经验势函数值，模拟结果见表1-表3。

表1: 经验水平值和经验势函数值，其中 $\pi = (0.02, 0.28, 0.2, 0.2, 0.3, 0.3)$

| $\pi^*$ | $n = 500$ | $n = 1000$ | $n = 2000$ |
|---|---|---|---|
| $(0.02, 0.28, 0.2, 0.2, 0.3, 0.3)$ | 0.033 | 0.036 | 0.043 |
| $(0.02, 0.28, 0.3, 0.1, 0.1, 0.4)$ | 0.481 | 0.742 | 0.907 |
| $(0.02, 0.28, 0.1, 0.3, 0.5, 0.2)$ | 0.557 | 0.843 | 0.942 |

表2: 经验水平值和经验势函数值，其中 $\pi = (0.02, 0.28, 0.2, 0.2, 0.3, 0.3)$

| $\pi^*$ | $n = 500$ | $n = 1000$ | $n = 2000$ |
|---|---|---|---|
| $(0.02, 0.28, 0.2, 0.2, 0.3, 0.3)$ | 0.036 | 0.038 | 0.049 |
| $(0.03, 0.38, 0.2, 0.1, 0.1, 0.5)$ | 0.494 | 0.754 | 0.917 |
| $(0.04, 0.48, 0.2, 0.3, 0.5, 0.1)$ | 0.596 | 0.859 | 0.958 |

表3: 经验水平值和经验势函数值，其中 $\pi = (0.02, 0.28, 0.2, 0.2, 0.3, 0.3)$

| $\pi^*$ | $n = 500$ | $n = 1000$ | $n = 2000$ |
|---|---|---|---|
| $(0.02, 0.28, 0.2, 0.2, 0.3, 0.3)$ | 0.041 | 0.048 | 0.060 |
| $(0.03, 0.38, 0.3, 0.1, 0.2, 0.5)$ | 0.681 | 0.892 | 0.957 |
| $(0.04, 0.48, 0.1, 0.3, 0.4, 0.1)$ | 0.657 | 0.903 | 0.982 |

从3个表中可以看出：在原假设成立的情况下，残量累积和(RCUSUM)检验统计量没有出现过分拒绝原假设的现象；同时随着样本容量的增加，经验水平值和经验势函数值都有增加。在不同的样本容量下，经验水平值也都较接近显著水平0.05，即检验方法在原假设成立时犯第一类错误的概率都很小。反之，如果当备择假设成立时，出现了一些有趣的现象。我们发现如果参数 $\theta = \{\omega, \alpha_1, \beta_1, \beta_2\}$ 变化的幅度越大，则经验势函数值越大，说明样本中出现变点的概率也越大。虽然其他参数 $\mu$ 和 $\beta$ 对经验势函数值的影响相对于参数 $\theta = \{\omega, \alpha_1, \beta_1, \beta_2\}$ 弱些，

但这并不能否定这些参数对变点检验的影响。究其原因，显然这是因为样本条件方差主要是由GARCH的参数所决定。总之，通过数值模拟的分析充分说明了用残量累积和统计量检验带趋势项GARCH误差模型的参数变化的合理性。

为了进一步说明残量累积和统计量的特性，我们用IBM从1961年5月17号到1962年7月2号的收益率数据做实例模拟。数据的原始序列见图1，显然$y_t$是非平稳的。而对数差分的序列$\ln y_t - \ln y_{t-1}$见图2，并对此序列应用平稳性游程检验，得到游程数$r = 239$，其均值$Er = 182.42$，方差$D(r) = 7960.86$，在检验水平0.05下，得$Z = (r-Er)/\sqrt{D(r)} = 0.6365 < 1.96$，故认为对数差分序列是平稳的。尽管如此，我们从图2中发现对数差分序列的波动是不均匀的，我们猜测这可能是原序列的分段平稳造成的。在检验水平0.01下，用残量累积和统计量对原始序列检验，接受变点存在的假设并得到变点估计$\hat{k} = 234$，其中变点估计的统计量为

$$\hat{k} = \min_{1\le k\le T}\left\{k : |R_k| = \max_{1\le t\le T}|R_t|\right\},$$

并用BIC准则确定GARCH过程的阶数，结果见表4。

表4: 用GARCH(1,2)模型拟合IBM股票价格原始数据的结果

| | $\mu$ | $\beta$ | $\omega$ | $\alpha_1$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| [1,234] | 0.07(0.356) | 0.23(0.671) | 17.89(2.81) | 0.36(0.19) | 0.38(0.06) | 0.04(0.08) |
| [235,350] | 0.46(0.443) | -0.66(0.713) | 49.22(7.22) | 0.44(0.21) | 0.45(0.09) | 0.07(0.13) |

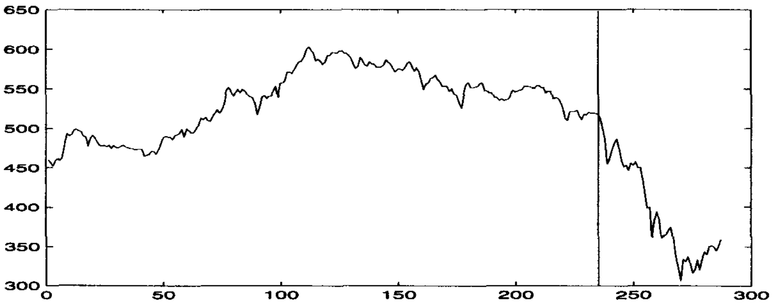


图1: 数据原始序列图

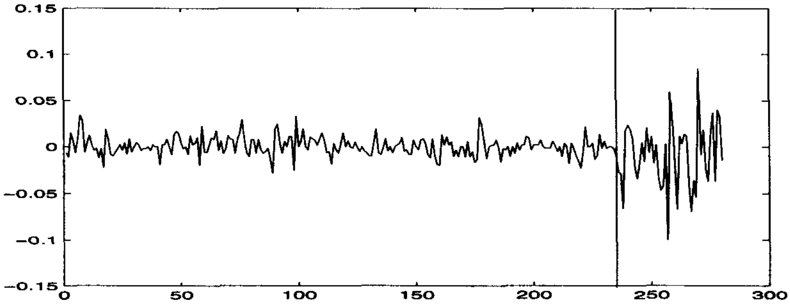


图2: 数据对数差分图

在变点时刻之前，即从时刻$t=1$到$t=234$的模型为

$$
\begin{aligned}
Y_t &= 0.07 + 0.23t + \eta_t,\\
\eta_t &= h_t\varepsilon_t,\\
h_t^2 &= 17.89 + 0.36\eta_{t-1}^2 + 0.38h_{t-1}^2 + 0.04h_{t-2}^2.
\end{aligned}
$$

而在变点时刻之后，即从时刻$t=235$到$t=280$的模型为

$$
\begin{aligned}
Y_t &= 0.46 - 0.66t + \eta_t,\\
\eta_t &= h_t\varepsilon_t,\\
h_t^2 &= 49.22 + 0.44\eta_{t-1}^2 + 0.45h_{t-1}^2 + 0.07h_{t-2}^2.
\end{aligned}
$$

## 5　结论

本文沿用由Lee等人[15]提出的残量累积和统计量检验带趋势项的GARCH误差模型的参数变化。研究表明如果原假设条件成立，残量累积和统计量的渐近极限分布是一个标准布朗桥的上确界。证明过程中，我们用到了由Pligrad[19]与Carrasco和Chen[20]证明的关于强混合序列的不变性原理。数值模拟结果表明，残量累积和检验的经验水平值和经验势函数值都较接近预先设定的显著水平。总之，对于GARCH模型参数变化的检验问题，残量累积和统计量不失为一个有效的方法。

## 参考文献：


[1] Csorgo M, Horvath L. Limit Theorems in Change-point Analysis[M]. New York: John Wily & Sons, 1997

[2] Bhattacharya P K. Maximum likelihood estimation of a change-point in the distribution of independent random variables: general multiparameter case[J]. Journal of Multivariate Anal, 1987, 23(2): 13-21

[3] Krishnaiah R C, Miao B Q. A multicountry characterization of the nonstationarity of aggregate output[J]. Journal of Money Credit and Banking, 1988, 22(5): 77-93

[4] 韩四儿，田铮，党怀义. 厚尾相依序列均值变点的截尾估计及其收敛性[J]. 工程数学学报，2006, 23(3): 1031-1038

[5] Andrews D W K, Ploberger W. Optimal tests when a nuisance parameter is present only under the alternative[J]. Journal of Econometirca, 1994, 62(18): 1383-1414

[6] Bai J. Estimation of a change point in multiple regression models[J]. Journal of Time Series Analysis, 1997, 15(4): 453-472

[7] Bai J, *et al.* Testing for and dating breaks in integrated and cointegrated time series[J]. Journal of Review of Economic Studies, 1998, 65(7): 395-432

[8] Bai J, Perron P. Computation and estimation of multiple structural change models[J]. Journal of Applied Econometrics, 2003, 18(1): 1-22

[9] Engle R F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation[J]. Journal of Econometrica, 1982, 50(3): 987-1008

[10] Kokoszka P, Leipus R. Change-point in the mean of dependent observations[J]. Journal of Statistics and Probability Letters, 1998, 40(9): 385-393

[11] Hall P, Yao Q. Inference in ARCH and GARCH models with heavy-tailed errors[J]. Journal of Econometrica, 2003, 71(6): 285-317

[12] Andreou E, Ghysels E. Detecting multiple breaks in financial market volatility dynamics[R]. Technical Report CIRANO, 2001: 1-65

[13] Inclan C, Tiao G C. Use of cumulative sums of squares for retrospective detection of changes of variance[J]. Journal of American Statistic Association, 1994, 89(14): 913-923

[14] Maekawa K, *et al.* Structural change and spurious volatility persistence[R]. Discussion Paper, Faculty of Economics, Hiroshima University, 2003

[15] Lee S, *et al.* The residual cusum test for constancy parameters in GARCH(1,1) models[J]. Journal of Japan Statistic Association, 2004, 34(8): 173-188

[16] Berkes I, *et al.* GARCH processes: structure and estimation[J]. Journal of Bernoulli, 2003, 9(19): 201-227

[17] Bougerol P, Picard N. Strict stationary of generalized autoregressives processes[J]. Journal of Annual Probability, 1992, 20(2): 17-39

[18] Bougerol P, Picard N. Stationary of GARCH processes and of some nonnegative time series[J]. Journal of Econometrics, 1992, 52(6): 115-127

[19] Pligrad M. Recent advances in the central limit theorem and its weak invariance principle for mixing sequences of random variables[C]// Dependence in Probability and Statistics, Eberlein E and Taqqu M S (eds), 1986: 193-223

[20] Carrasco M, Chen X. Mixing and moment properties of various GARCH and stochastic volatility models[J]. Journal of Econometric Theory, 2002, 18(1): 17-39

# Residual CUSUM Tests for Parameters' Change in GARCH Error Models with Deterministic Trend

JIN Hao[1], TIAN Zheng[1,2], ZHANG Si[3]

(1- Departmnet of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072;
2- State Key Laboratory of Remote Sensing Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100101;
3- Gx-xust, Xi'an University of Science & Technology, Xi'an 710109)

**Abstract:** This paper analyzes the test problem for parameters' change in GARCH error models with deterministic trend. The residual cusum test is proposed when the parameters are unknown, which can weaken the influence of dependent observations. It is shown that the asymptotically limiting distribution of the residual cusum test statistic is the supermum of a standard Brownian bridge under the null hypothesis. In order to verify our conclusion, we carry out a Monte Carlo simulation and examine the return of IBM data. The results from both simulation and real data analysis support our claim.

**Keywords:** residual cusum test; invariance principle; Brownian bridge; change point